# *Introduzione ai Modelli Fuzzy*

**Andrea Bonarini**

Artificial Intelligence and Robotics Lab
Department of Electronics and Information

POLITECNICO DI MILANO

ict institute POLITECNICO DI MILANO

E-mail: bonarini@dei.polimi.it
URL:http://www.dei.polimi.it/people/bonarini

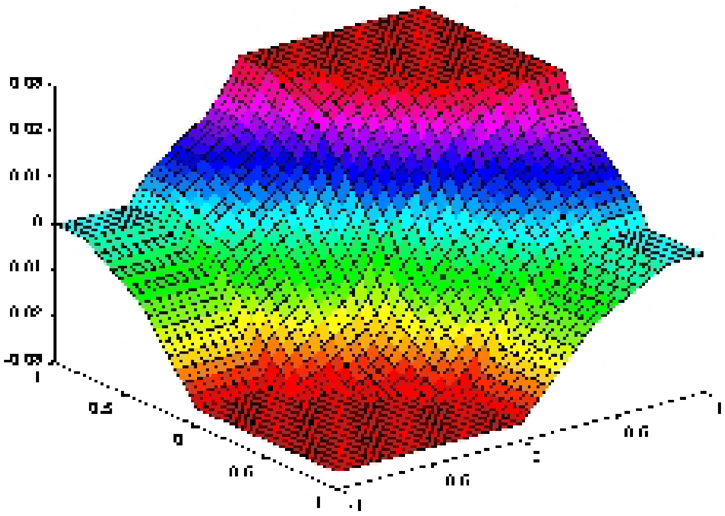
# Modelli fuzzy

Possibilità di descrivere a parole la relazione tra variabili numeriche o ordinali

**IF (X is molto positivo) AND**
**(Y is molto negativo)**
**THEN (Z is molto negativo)**

**IF (X is zero) AND (Y is zero)**
**THEN (Z is zero)**

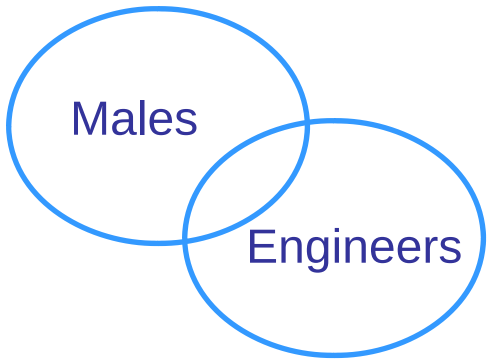
**...**



# Tutta la tecnologia fuzzy è basata sui fuzzy set

Gli insemi fuzzy sono stati definiti da L. Zadeh nl 1965 come estensione degli insiemi tradizionali (crisp set)

Un fuzzy set è un insieme la cui funzione di appartenenza varia sull'intervallo [0,1]




Crisp sets


Fuzzy sets

# Fuzzy membership functions

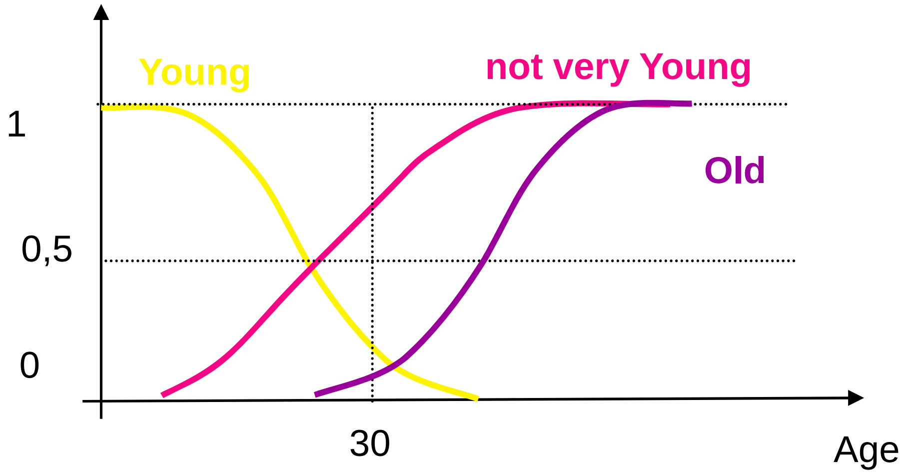
Una membership function definisce un fuzzy set

Definisce il grado di appartenenza di un elemento all'insieme

$$\mu: U \rightarrow [0, 1]$$

Una persona di 30 anni è:

- **Young** con membership 0,3
- **Old** con membership 0,2
- **not very Young** con membership 0,6



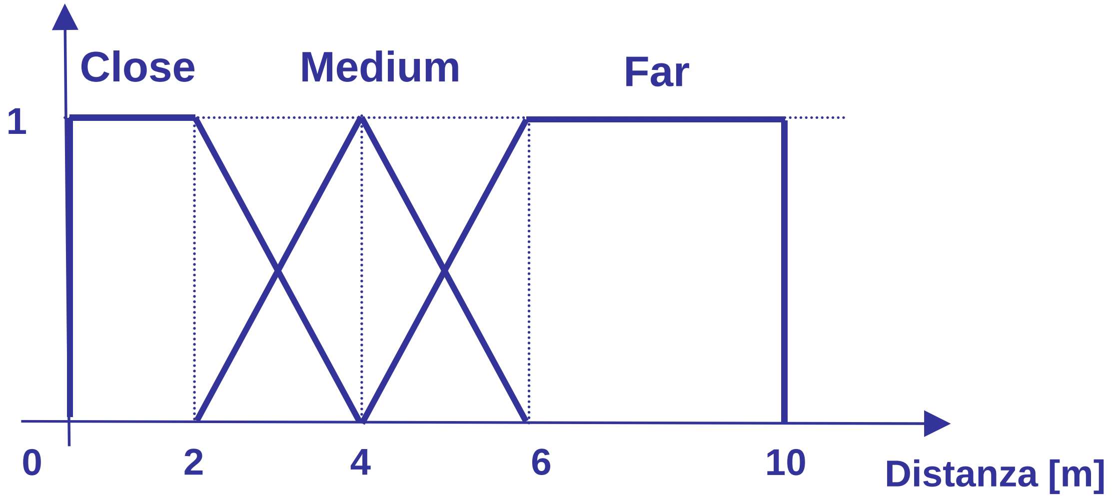
# Come definire funzioni di appartenenza

1. Selezionare la variabile
2. Definire l'intervallo di valori rilevanti
3. Identificare termini interessanti (nomi dei fuzzy set)
4. Per ogni etichetta identificare punti caratteristici
5. Identificare la forma delle membeship function
6. Verifica

# Proviamo a definire funzioni di appartenenza

Supponiamo di voler definire il concetto di distanza dalla palla per un robot calciatore

- Selezionare la variabile → Distanza
- Intervallo valori → [0..10]
- Termini → Close, Medium, Far
- Punti caratteristici → 0, max, valori di mezzo, dove MF=1, ...
- Forma funzioni → Lineare



# Funzioni di appartenenza e concetti

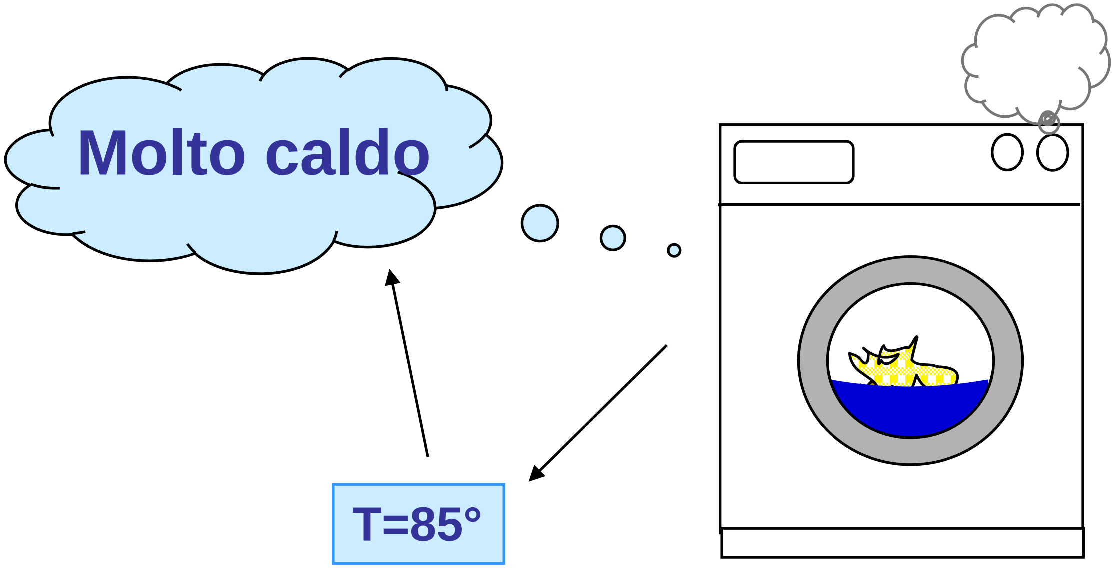
Le funzioni di appartenenza **definiscono** fuzzy sets

Le etichette **denotano** fuzzy sets

I fuzzy sets possono essere considerati rappresentazioni **concettuali**

**Symbol grounding**:

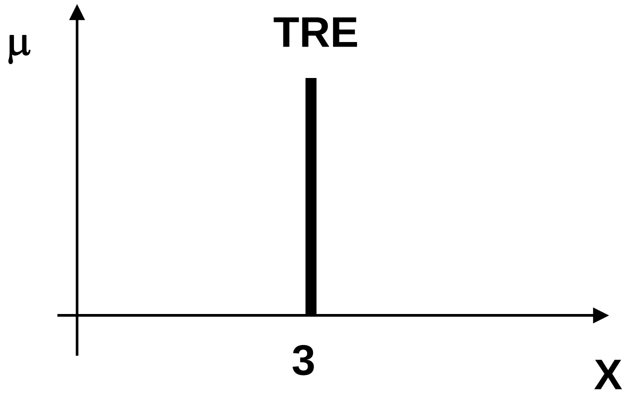
si può ragionare in termini di concetti e basarli su interpretazioni matematicamente fondate dei dati numerici rilevati



# "Strane" MFs

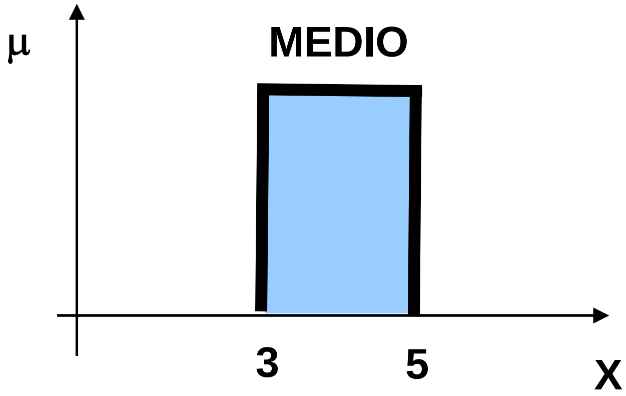
**Singleton**:

un fuzzy set con un solo membro

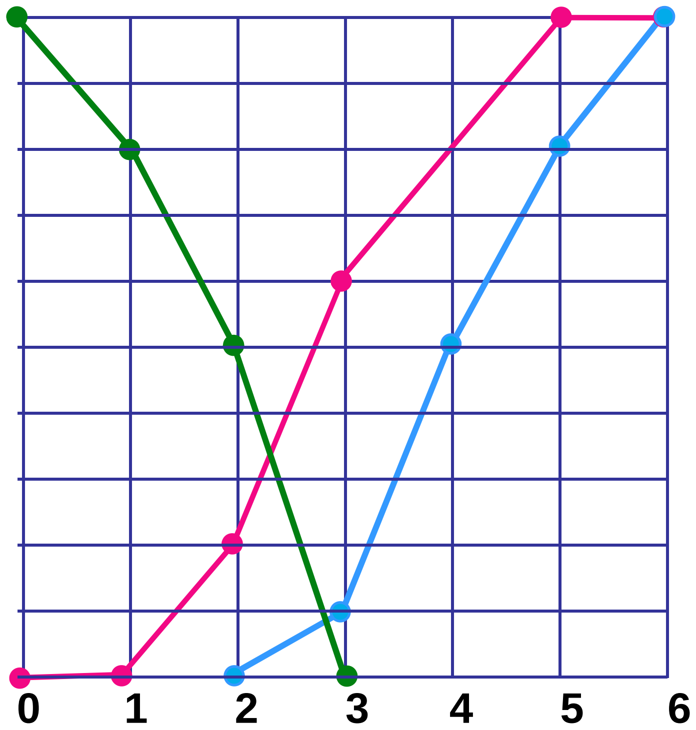



**Intervallo**:

un fuzzy set con membri tutti con lo stesso grado di appartenenza



# Insiemi fuzzy su scale ordinali




0 - no education
1 - elementary school
2 - high school
3 - two year college
4 - bachelor's degree
5 - masters's degree
6 - doctoral degree

poorly educated
highly educated
very highly educated

## A cosa ci servono i fuzzy set?

A definire **interpretazioni** dei dati che possano permetterci di ragionare ad alto livello di astrazione: “Il consumo gomme è **elevato**”

Possiamo definire **relazioni** tra ingressi e uscite in termini linguistici: “se il carburante è **poco** e il distacco è **alto** allora rallenta **poco**”

Vediamo come definire queste relazioni

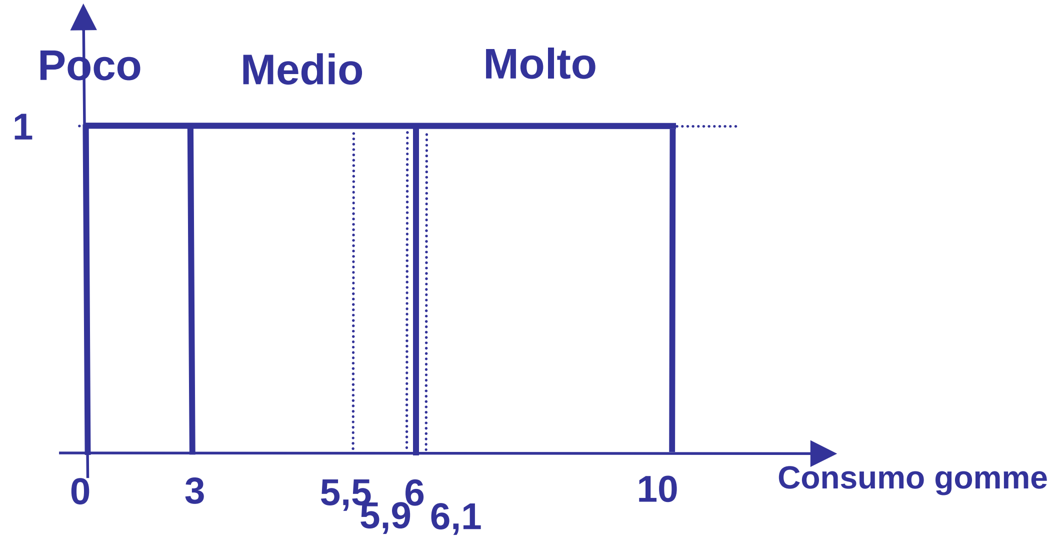
**Logica Fuzzy**

**Regole Fuzzy**

## Logica

La logica, usata fin dal tempo dei greci per rappresentare formalmente l'attività di ragionamento tipica degli esseri umani, permette di definire se un'affermazione è **vera** o **falsa**

**Il consumo gomme è molto elevato [~~SI~~] [~~NO~~]**



## Potere rappresentativo della logica classica

Lo stesso Aristotele aveva problemi sulla bontà della logica classica come **strumento di rappresentazione della conosenza**

Per esempio, come facciamo a definire se sia vera o falsa una proposizione riguardante il futuro?

Es.: “Domani pioverà”

?

## Proposizioni in logica fuzzy

In logica fuzzy, le proposizioni sono espresse sempre come:

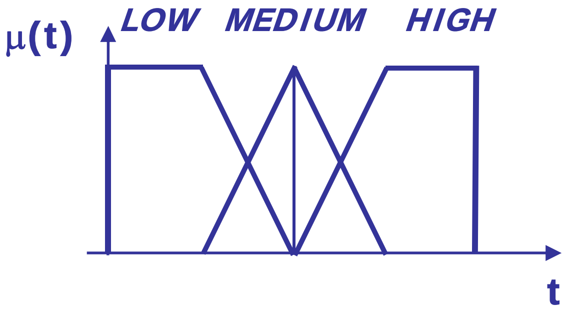
**A is L**

dove:

- **A** è una variabile linguistica
- **L** è l’etichetta che denota un fuzzy set

Una variabie linguistica è una variabile che assume come valori dei termini che denotano fuzzy set definiti su una variabile ordinale (numerica)

Es.: P: Temperature is HIGH



## Logiche a più valori

Con una logica a più valori si può definire un quanto si ritiene che una proposizione sia vera

Es.: Domani pioverà

Es.: Domani pioverà **0,2**

**?**

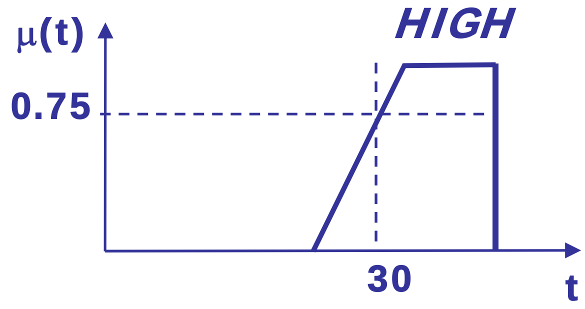
## Valore di verità di proposizioni in logica fuzzy

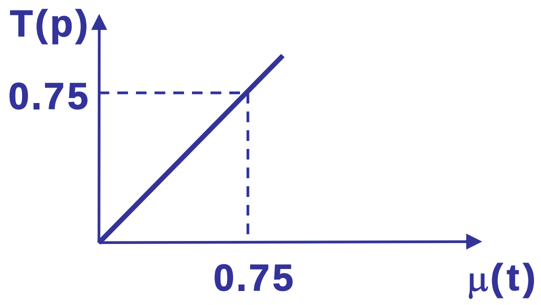
I valori di verità di una proposizione fuzzy sono uguali al grado di appartenenza di una valore della variabile (t nell'esempio) associata alla variabile lnguistica (Temperature nell'esempio) rispetto al fuzzy set denotato dal valore della variabile linguistica

Es.: P: Temperature is HIGH

T(P)= **0,75**

$\mu_{HIGH}(30) = 0,75$

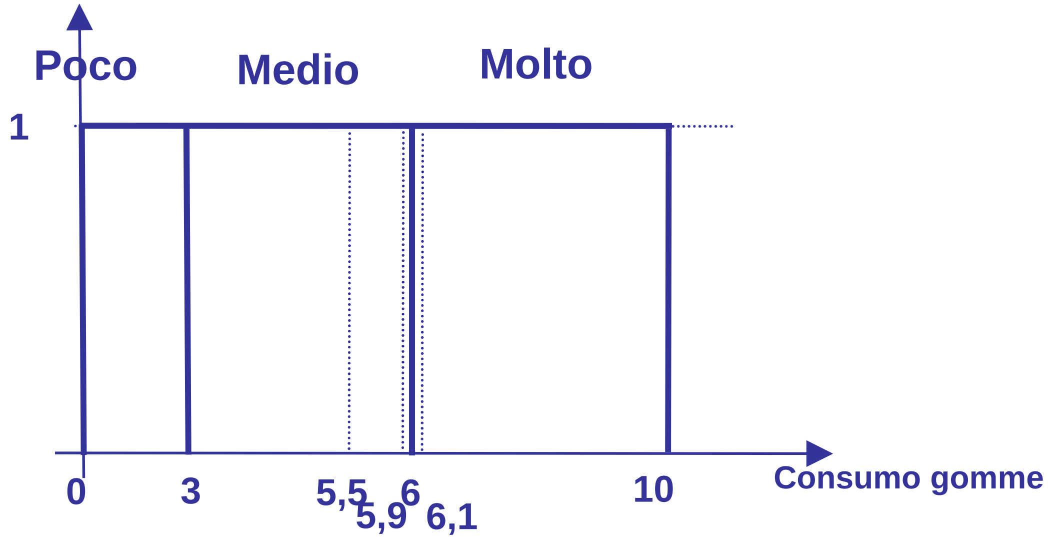


# Logica

La logica tradizionale permette di definire se un'affermazione è **vera** o **falsa**

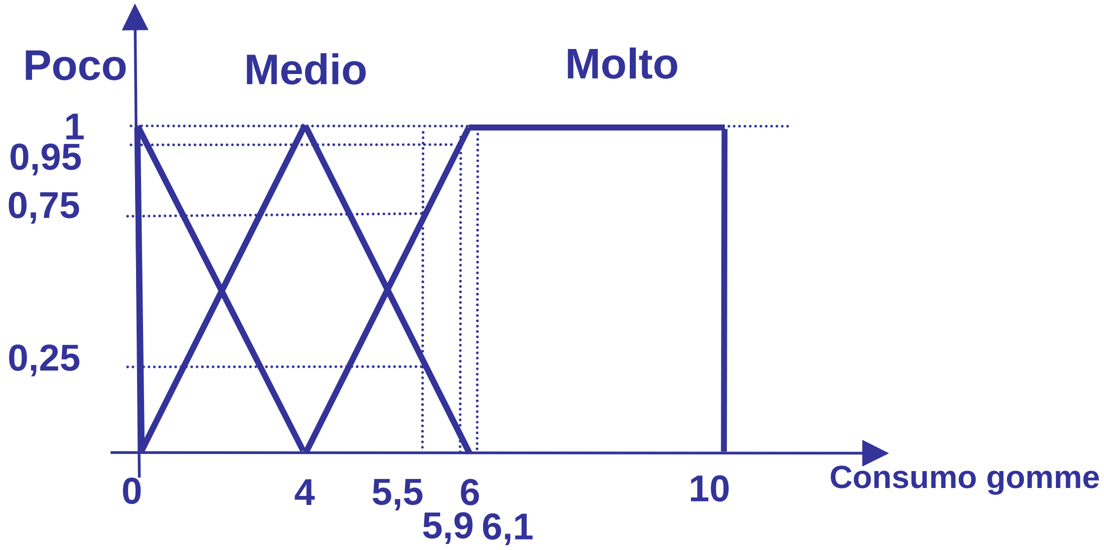
**Il consumo gomme è molto elevato ~~[SI]~~ ~~[NO]~~**



# Logica fuzzy

La logica fuzzy, basata sull'idea di insieme fuzzy, permette di definire il grado di verità di un'affermazione nell'intervallo [0,1]

**Il consumo gomme è molto elevato 0,75**



# Gradi di verità e probabilità

I gradi di verità spesso sono confusi con le probabilità

Sono concettualmente distinti: i **gradi di verità** rappresentano gradi di appartenenza a fuzzy set, non la **probabilità** o meno che un evento si verifichi.

Per illustrare la differenza, consideriamo questa situazione:

> Mario vive in una casa con due stanze adiacenti: la cucina e la camera da pranzo. In molti momenti Mario e' in cucina, in altri in sala da pranzo. Quando però Mario è sulla porta tra cucina e sala e sta passando da una stanza all'altra, gradualmente cambia il suo stato e in ogni momento è parzialmente in una stanza e parzialmente nell'altra, cioè è sempre meno vero che è in cucina e sempre più vero che è in sala. Non ci sono possibilità per descrivere probabilisticamente questo essere parzialmente in una stanza o nell'altra.

## Operatori logici

Per ragionare in termini logici servono operatori che permettano di combinare i valori di verità delle varie proposizioni

**NOT**

T(NOT (V is L))= 1 – T(V is L)

**AND**

T((V1 is L1) AND (V2 is L2)) = min (T(V1 is L1), T(V2 is L2))

T((V1 is L1) AND (V2 is L2)) = T(V1 is L1) * T(V2 is L2)

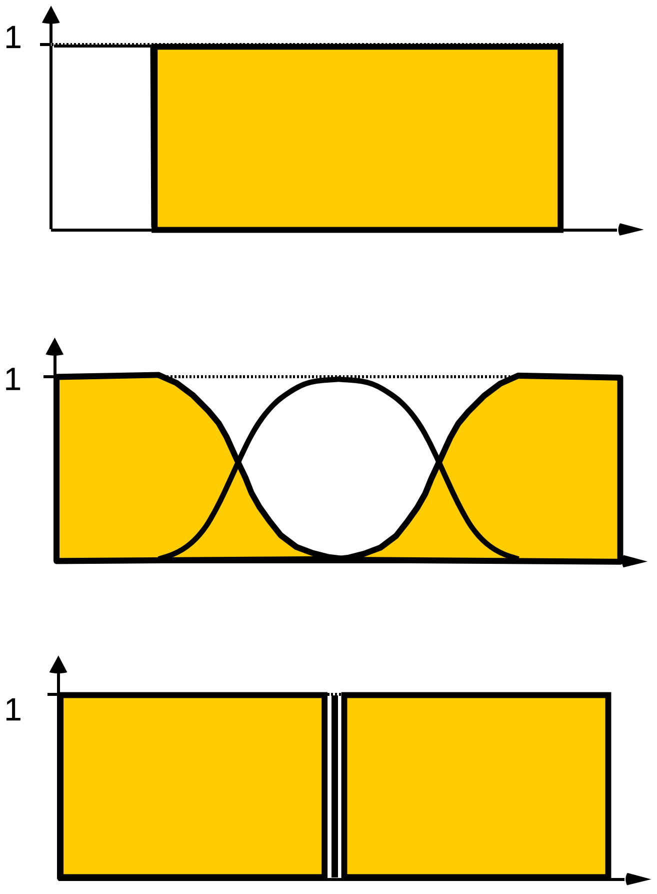
**OR**

T((V1 is L1) OR (V2 is L2)) = MAX (T(V1 is L1), T(V2 is L2))

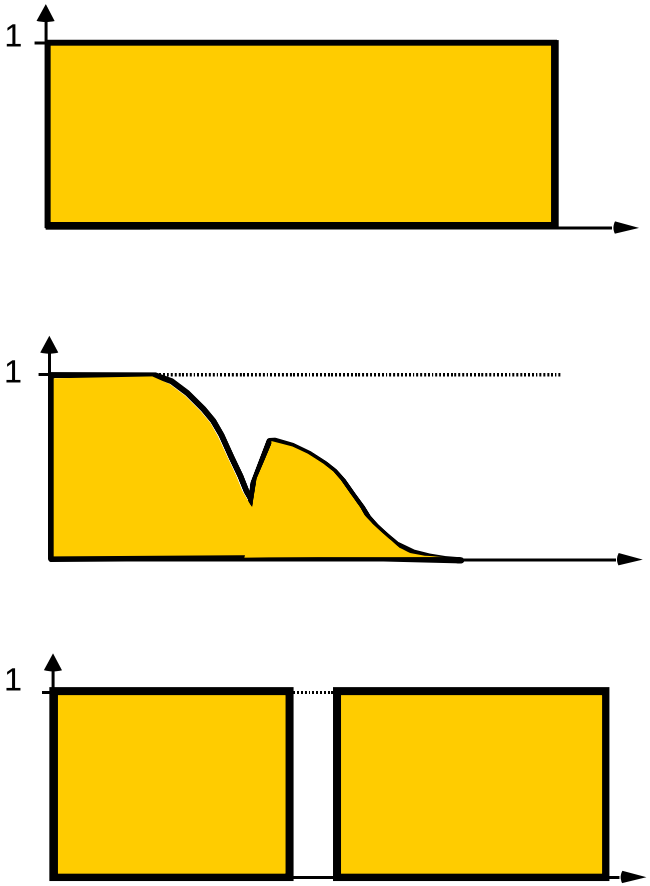
T((V1 is L1) OR (V2 is L2)) = T(V1 is L1) + T(V2 is L2) -

- T(V1 is L1) * T(V2 is L2)

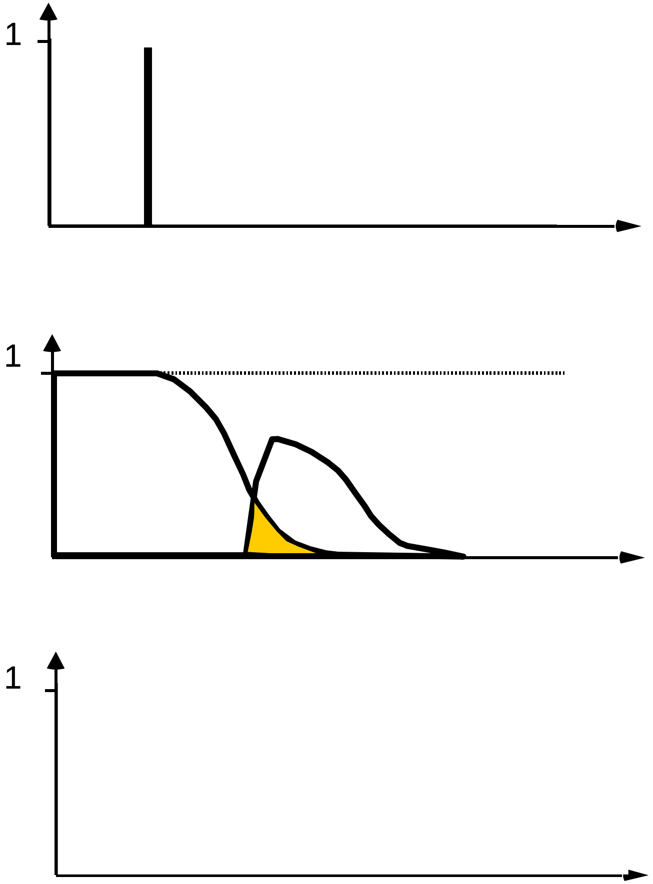
# Negazione



# OR



# AND



## Regole di inferenza

Possiamo definire una regola come un **modello**, un modo per definire una relazione (**mapping**) tra ingressi (antecedente della regola) e uscite (conseguente).

IF <antecedente> THEN <conseguente>

Le regole permettono di ricavare valori di verità delle uscite a fronte di valori di verità per gli ingressi

## Regole fuzzy

Una **regola fuzzy** è una regola in cui antecedenti e conseguenti contengono elementi (clausole), combinati tra loro da operatori fuzzy, che hanno tutti la stessa forma:

**(V is L)**

dove V è una **variabile linguistica** e L è un'etichetta, un valore per V associato a un fuzzy set.

L'**antecedente** ha un valore di verità che dipende dal grado di appartenenza di una variabile numerica al fuzzy set corrispondente all'etichetta.

Il **conseguente** può essere di due tipi diversi, dando luogo a due tipi di regole ...

## Regole linguisiche

**Regole linguistiche** (Mamdani): il conseguente è una congiunzione di clausole linguistiche

**IF (A is $LA_n$) AND (B is $LB_k$) AND... THEN (U is $LU_m$) AND ...**

Ad esempio:

IF (Distance is Far) AND (BallDirection is Front)

THEN (Speed id High) AND (Direction is Ahead)

Questa può essere considerata come una relazione tra

l'**interpretazione di una configuazione d'ingresso**

e

una **descrizione simbolica dell'uscita desiderata**

# Regole di modello

**Regole di modello** (Sugeno, or Takagi-Sugeno-Kosko TSK):

legano un **modello** (lineare, non lineare, NN, ...) all'interpretazione linguistica delle sue **condizioni di applicabilità**

**IF (A is $LA_n$) AND (B is $LB_k$) AND... THEN U is f(*A*, *B*)**

Ad esempio:

IF (Temperature is High) AND (WaterLevel is High)

THEN Heating = 400 - 3*T* -7*WL*

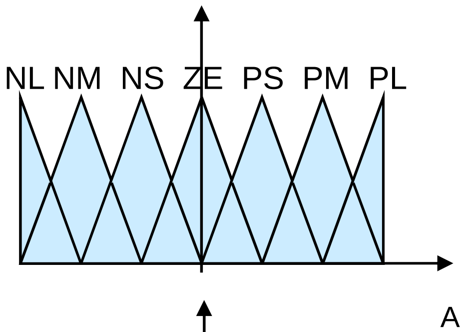
Questo può essere considerato una relazione tra

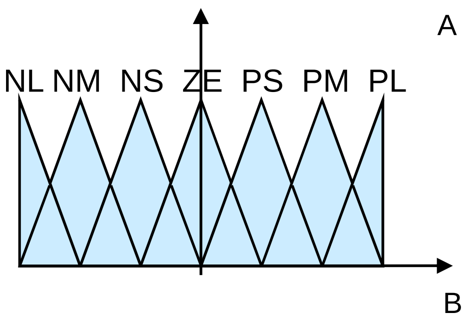
l'**interpretazione di una configurazione di ingresso (le condizioni di applicabilità di un modello)**

e

il **modelllo da aplicare alle variabili di ingresso per ottenere l'uscita** in quelle condizioni

# Come si usano le regole fuzzy




**R1: if A is PL and B is PS Then X is PM**

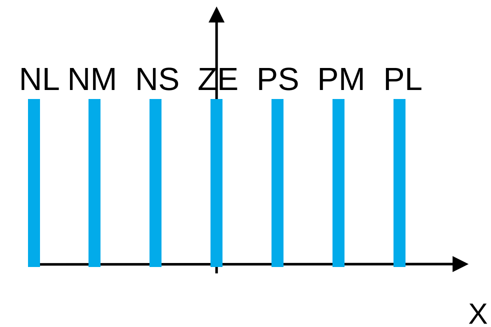
**1**

**R2: if A is PM and B is PS Then X is PS**

**0.5**

**R3: if A is PL and B is PM Then X is PM**

**1**




**Input matching**

**Combinazione dei gradi di matching**

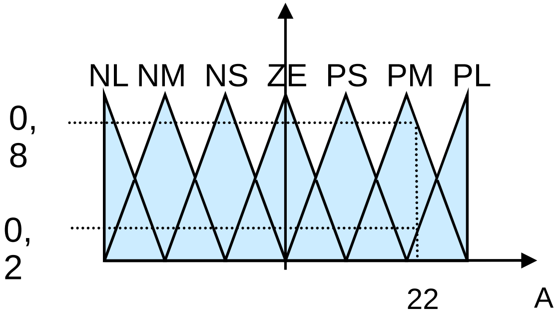
**Eventuale combinazione con il peso della regola**

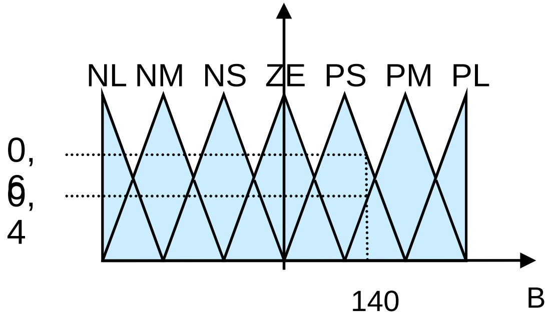
**Aggregazione delle uscite proposte da regole differenti**

**Eventuale defuzzyficazione delle uscite**

# Input matching

A = 22 Input B = 140




R1: IF (A is PL) (B is PS) THEN (X is PM)

0,2 0,6

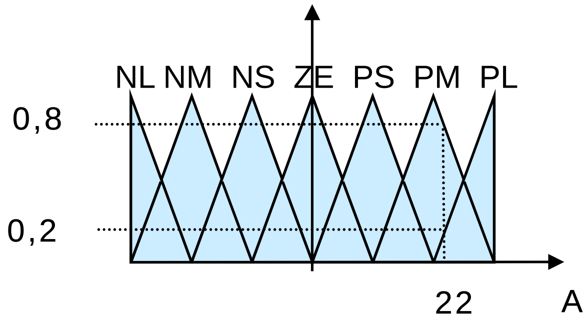
R2: IF (A is PM) (B is PS) THEN (X is PS)

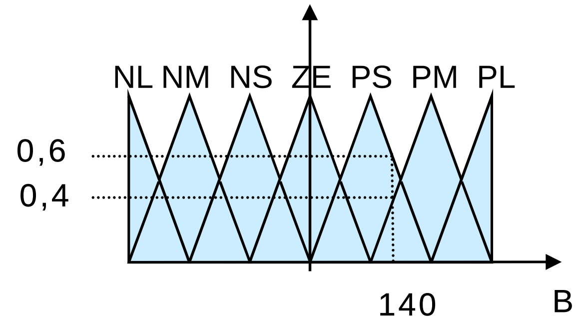
0,8 0,6

R3: IF (A is PM) (B is PM) THEN (X is PM)

0,8 0,4

# Combinazione di gradi di matching nell’antecedente




Usiamo l’operatore **min**

R1: IF (A is PL) (B is PS) THEN (X is PM)

0,2 0,6

0,2

R2: IF (A is PM) (B is PS) THEN (X is PS)

0,8 0,6

0,6

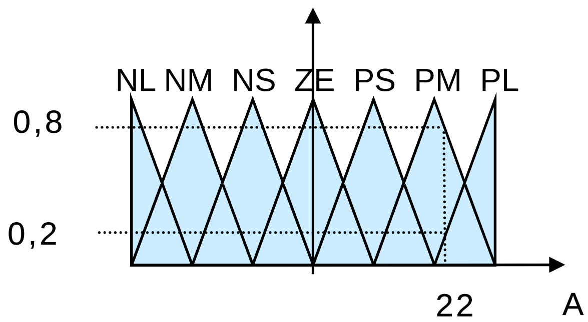
R3: IF (A is PM) (B is PM) THEN (X is PM)

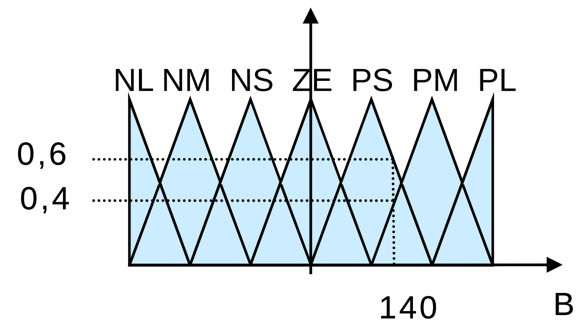
0,8 0,4

0,4

Il grado di matching dell’antecedente è una misura di quanto bene l’antecedente interpreta la situazione in ingresso

# Combinazione con il peso della regola




Usiamo l'operatore **min**

R1: IF (A is PL) (B is PS) THEN (X is PM)

$$\underbrace{\underbrace{0{,}2 \qquad 0{,}6}_{0{,}2} \qquad 1}_{0{,}2}$$

R2: IF (A is PM) (B is PS) THEN (X is PS)

$$\underbrace{\underbrace{0{,}8 \qquad 0{,}6}_{0{,}6} \qquad 0{,}5}_{0{,}5}$$

R3: IF (A is PM) (B is PM) THEN (X is PM)

$$\underbrace{\underbrace{0{,}8 \qquad 0{,}4}_{0{,}4} \qquad 1}_{0{,}4}$$

Il valore risultante, assegnato come peso al conseguente, è una misura di quanto la regola è buona per la situazione e a priori

# Aggregazione delle uscite

R1: if (A is PL)  (B is PS) Then (X is PM)
0,2

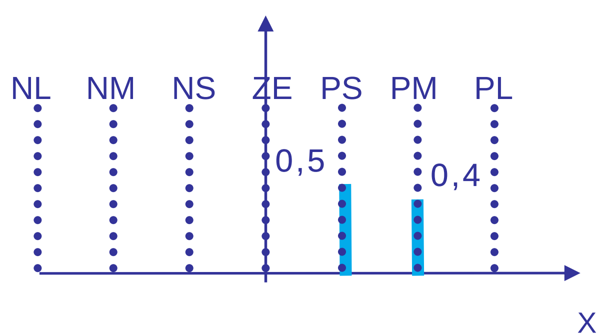
R2: if (A is PM)  (B is PS) Then (X is PS)
0,5

R3: if (A is PL) (B is PM) Then (X is PM)
0,4

X is PM con peso 0,4 ← **max**

X is PS con peso 0,5

A questo punto abbiamo i valori di verità per le uscite.
I fuzzy set di uscita vengono aggregati dopo esser stati “tagliati” all’altezza proporzionale al valore di verità

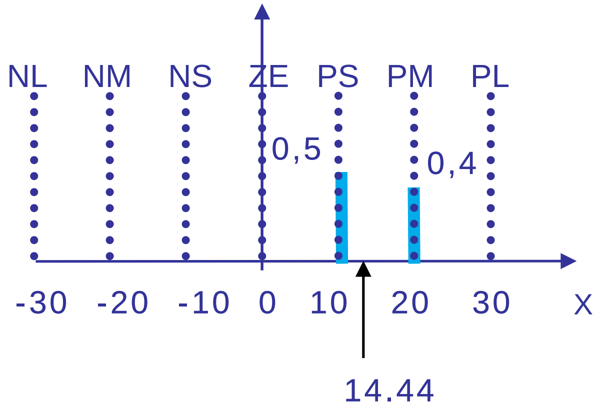



Usiamo l’operatore **max** per aggregare i valori assegnati alle stesse clausole da regole diverse

# Eventuale defuzzyficazione

X is PM con peso 0,4

X is PS con peso 0,5

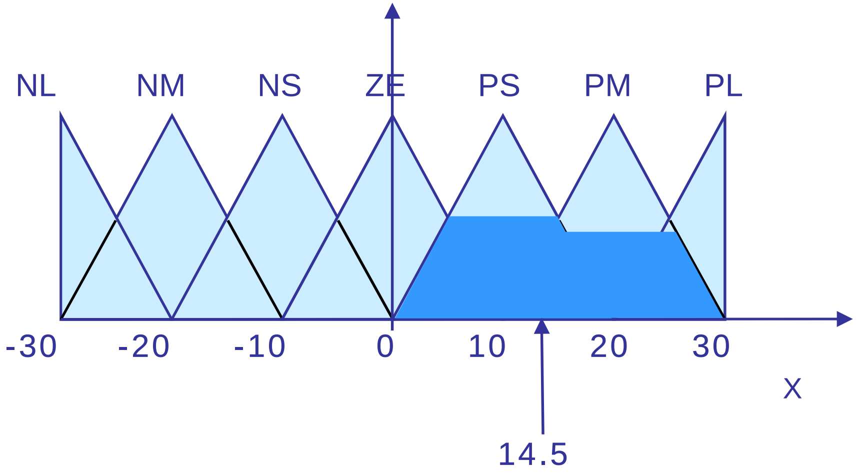



$(10*0,5 + 20*0,4)/(0,5 + 0,4) = \mathbf{14.44}$

Usiamo l'operatore "media pesata" per ricondursi a valori numerici per le uscite

# Se i fuzzy set dell'uscita fossero diversi da singleton?

Occorre calcolare il baricentro della figura risultante componendo i fuzzy set ottenuti tagliando i fuzzy set originali. In generale, le parti inferiori sono più ampie di quelle superiori e quindi, proporzionalmente, contano di più le parti basse.



# Cosa succede con le regole di Sugeno?

Se avessimo avuto, ad esempio,

R1: if (A is PL)  (B is PS) Then (X = a+b+2)

0,2

R2: if (A is PM)  (B is PS) Then (X = 2a+b+7)

0,5

R3: if (A is PL)  (B is PM) Then (X = a+b+2)

0,4

X = a+b+2 con peso 0,4 ← **max**

X = 2a+b+7 con peso 0,5

e quindi:

X= ((0,4 * (22+140+2)) + (0,5 * (2*22+140+7))/(0,4+0,5) =136,38

# A questo punto...

Sappiamo che:

- possiamo definire **concetti** (classificazioni) **basati su valori numerici o ordinali**
- possiamo definire affermazioni concettuali che possono essere **vere con una certa gradualità**
- possiamo definire regole fuzzy che realizzano un meccanismo di **ragionamento concettuale** che può esser messo in relazione con valori numerici, possiamo cioè creare una **funzione analoga a una funzione matematica**, esprimendola **a parole**

# A bit of history

- Fuzzy sets have been defined by Lofti Zadeh in 1965, as a tool to model approximate concepts
- In 1972 the first "linguistic" fuzzy controller is implemented
- In the Eighties boom of fuzzy controllers first in Japan, then USA and Europe
- In the Nineties applications in many fields: fuzzy data bases, fuzzy decision making, fuzzy clustering, fuzzy learning classifier systems, neuro-fuzzy systems...
  Massive diffusion of fuzzy controllers in end-user goods
- Now, fuzzy systems are the kernel of many "intelligent" devices and applications

# Applications of fuzzy models

- Fuzzy control

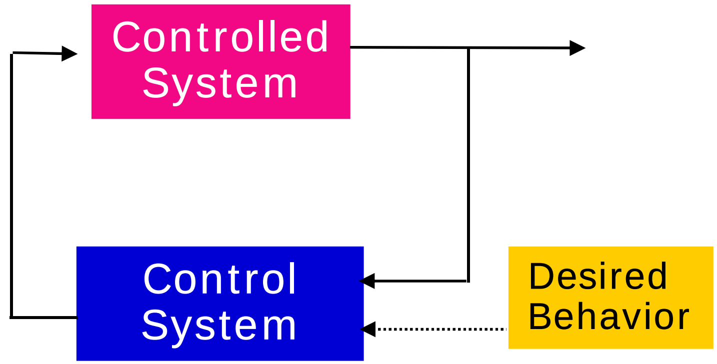
- Interfaces
  - user modeling
  - information retrieval
  - database queries

- “AI” Systems
  - Expert Systems
  - Scheduling
  - Decision Support Systems (DSS)

...

# What is a control system?

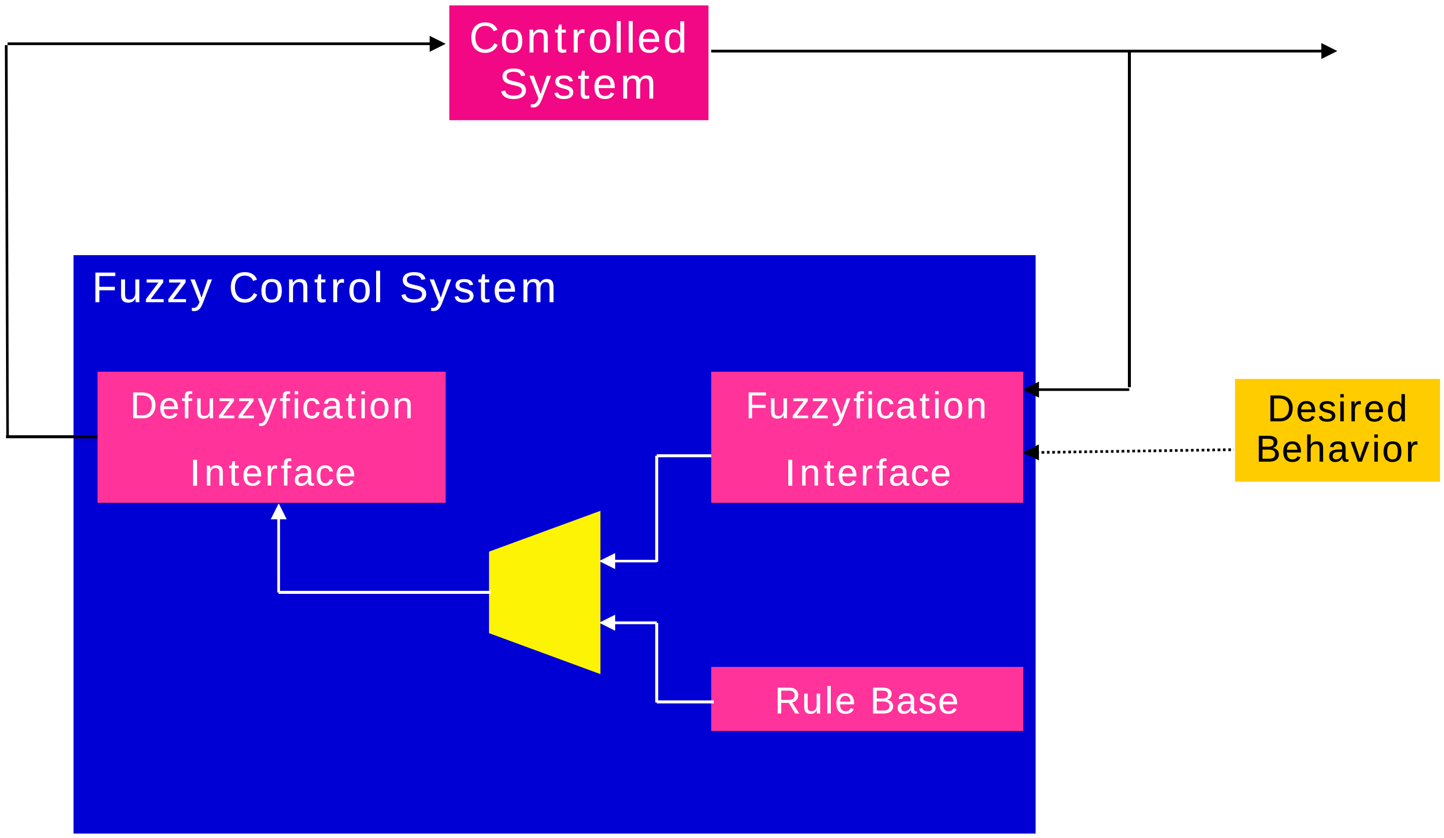
A system able to control the behavior of another system
(a device, a biological body, a plant, a community, the society, ...)




In most cases it is a PID controller, where the output ***u*** depends on the difference e between the desired, and the observed behavior, its derivative (how fast ***e*** changes) and its integral (how large ***e*** has been in the past):

$$u = K_P e + K_D \frac{de}{dt} + K_I \frac{1}{T} \int_0^t e\,dt$$

# What is a fuzzy control system?



# Why fuzzy control is so successful?

Features:

- robustness
- wide range of applicability
- heuristic definition
- smoothness
- non linearity

# Example FLC - 1: Wide range of variable values

1985: Sendai (Japan) metro

**Goal**: Control train stop

**Why fuzzy**?

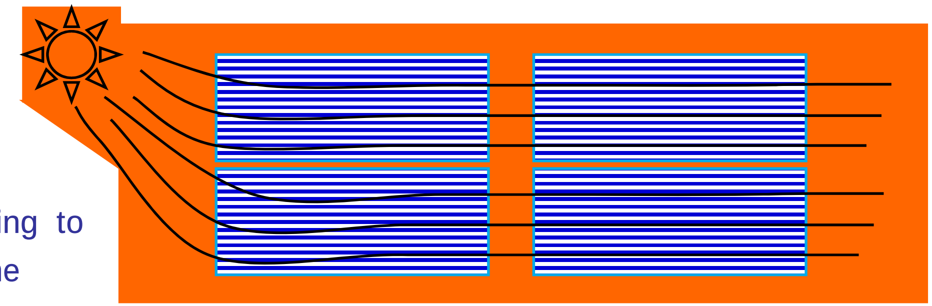
Different load conditions in the different stations

**Results**

- Energy saving
- Precision
- Higher comfort

# Example FLC - 2: wide range of variable values

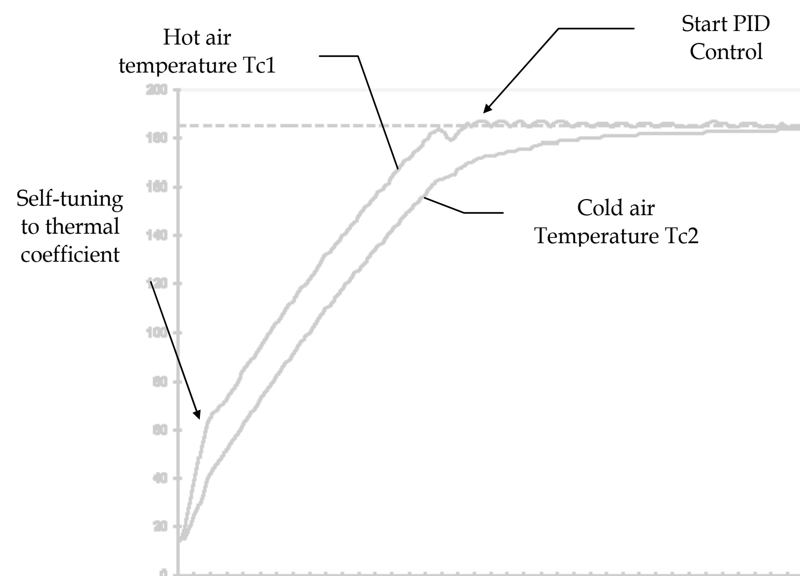
1996: oven for alluminum bars aging



**Goal**: reach the aging temperature according to technological constraints, in the shortest time

**Why fuzzy?**

- Different load conditions (10,000 different profiles)
- Low quality of sensor data (air temperature at the ends of the bars)




**Results**

- Energy saving
- Higher speed
- No need to tune the control system every now and then

# Example FLC - 3: noisy systems

1990: mini-helicopter in windy days (Tokio)

Goal: Control the stability and movement of the helicopter

Why fuzzy?

No forecast about the situation

Results

It flies...

# Example FLC - 4: Low cost control

1990: fuzzy video cameras, fuzzy vacuum cleaners, fuzzy washing machines, fuzzy refrigerators, fuzzy rice cookers, fuzzy taps...

Why fuzzy?

- Simplify the interaction with the user
- Nice performances at low cost (low cost sensors, low cost processors, ...)

Results

Reliable and simple mass products at a low cost

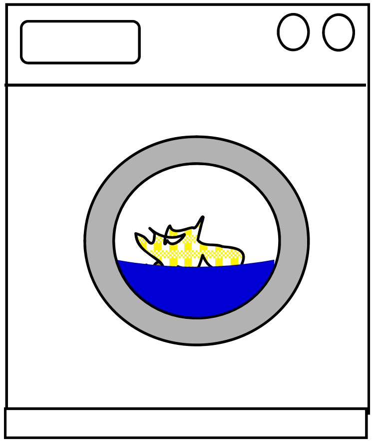
# FLC-4 – An example: fuzzy washing machine

**Goal**:

1. recognize the kind of fabric and adapt the washing
2. rinse till needed
3. adapt to the water hardness

**How**:

1. Measure the charging time of a condenser and the number of pressostate activations
2. measure the dielectric coefficient of the water at the beginning and rinse till it become the same at the end.



# Example FLC - 5: control of complex systems

1986: cement kiln, chemical plants

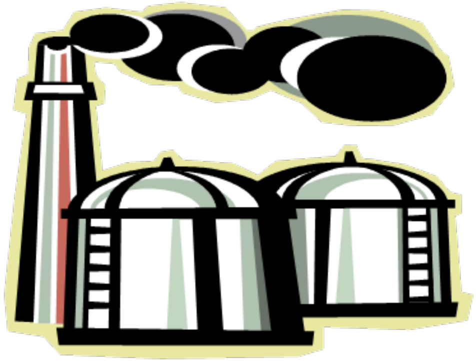
Goal: control the plant

Why fuzzy?

- hard to define and parametrize a mathematical model
- experts available (operators)

Results

- effective and robust control

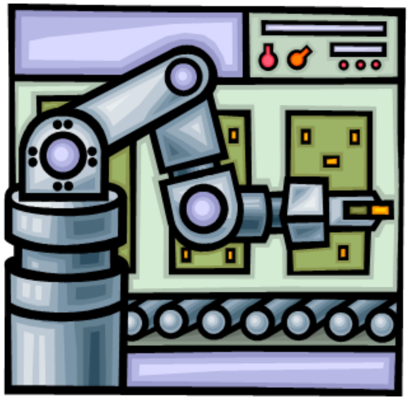


## Example FLC - 6: hybrid control

1990: temperature sensor, robot arm, ...

- Why fuzzy + PID?
  - Augment he range of applicability of a PID

- Results
  - Fast control without overshooting



## Example FLC - 7: high-level control

1998: autonomous robot

- Why fuzzy?
  - Clear representation of control rules
  - High level tasks
- Results
  - Good control developed in a short time

# Fuzzy databases and information retrieval

Flexible queries with human-like sensibility

E.g.:

"Give me the names of all the people that have **recently** invested **a lot"**

**SELECT Name, MatchingRate**

**FROM Investments**

**WHERE ((InvestmentDate is Recent) 0,8) AND ((InvestedAmount is Large) 0,5)**

| Name | InvestmentDate | InvestedAmount |
|---|---|---|
| PAOLO BIANCHI | 28 | 310 |
| MARTA ROSSI | 10 | 170 |
| ..... | | |

# Fuzzy databases and information retrieval

Flexible queries with human-like sensibility

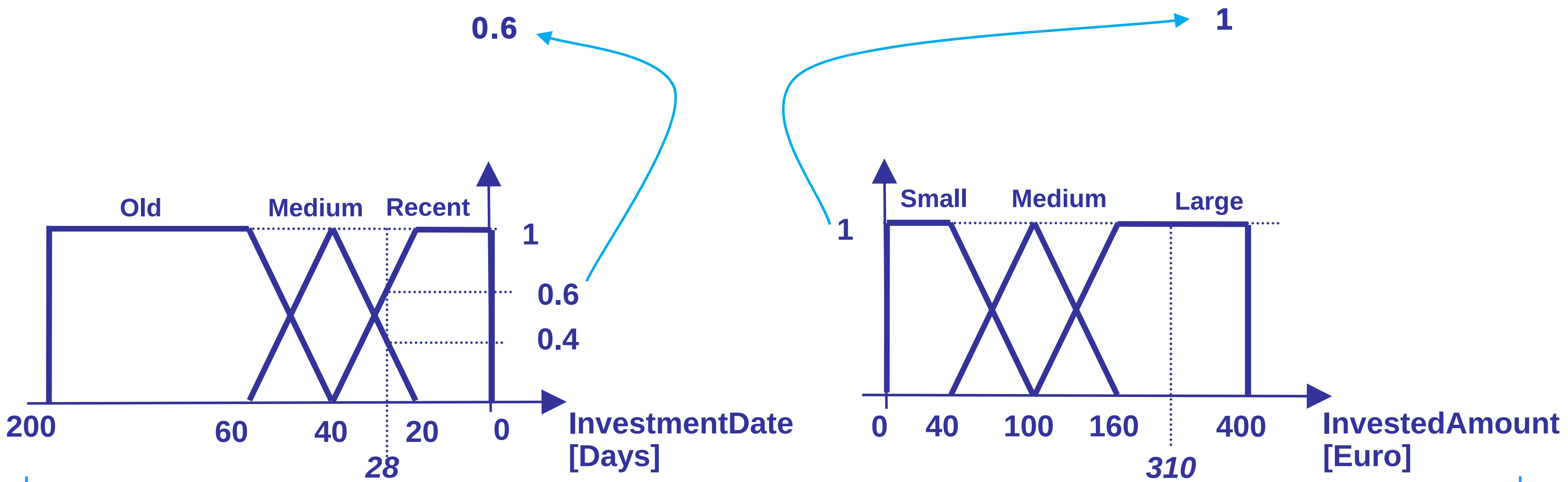
E.g.:

“Give me the names of all the people that have **recently** invested **a lot”**

**SELECT Name, MatchingRate**

**FROM Investments**

**WHERE ((InvestmentDate is Recent) 0,8) AND ((InvestedAmount is Large) 0,5)**



# Fuzzy databases and information retrieval

Flexible queries with human-like sensibility

E.g.:

“Give me the names of all the people that have **recently** invested **a lot”**

**SELECT Name, MatchingRate**

**FROM Investments**

**WHERE ((InvestmentDate is Recent) 0.8) AND ((InvestedAmount is Large) 0.5)**

**0.6** **1**

**0.48** **0.5**

**min**

**PAOLO BIANCHI 0.48**

**MARTA ROSSI 0.8**

**...**

# Example AIFS - 1: Quality control

**Goal**:

Control the quality of a product (car, beer,...) in a qualitative way, and relate the results to the part of the production process responsible for eventual problems

**Why fuzzy?**

Qualitative data from operators

**Results**

Quality control at low cost: the operator provides data, he/she should not interpret them

# Example AIFS - 2: diagnosis

**Goal:**

Diagnosis of industrial plants in the commissioning phase

**Why fuzzy?**

- approximate, uncertain data
- approximate diagnostic knowledge, low reliability

**Results**

- fast diagnosis at low cost
- it’s easy to understand the diagnostic process

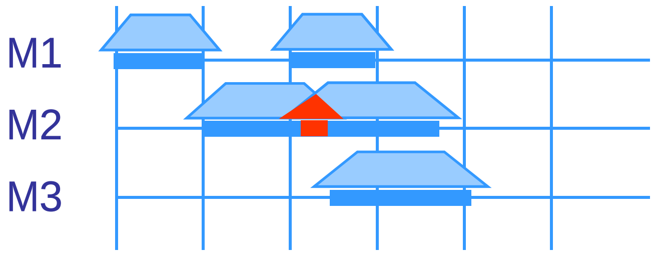
# Example AIFS - 3: scheduling

**Goal:**

production scheduling in a job-shop production plant

**Why fuzzy?**

fuzzy definition of constraints




**Results:**

fast and effective scheduling systems

# Example AIFS - 4: advice-giving

**Goal:**

decision support (e.g.: when to buy bonds, who is the right person for a job,...)

**Why fuzzy?**

- uncertain and approximate data
- approximate decision process
- shared formal model

**Results**

suggestions about decisions to be taken, weighted by criteria that can be easily defined by the management

# Example  AIFS - 5: User-modeling

**Goal:**

model how a driver changes gears in different road situations to implement a robotic gear shift (CRF)


**Why fuzzy?**

- uncertain and approximate data
- approximate decision process
- hign level features synthesized from objective data

**Results**

adaptive robotic gear shift

# Fuzzy References


- A. G. Pizzaleo. **Fuzzy Logic: come insegneremo alle macchine a ragionare da uomini**. Castelvecchi, Roma
- B. Kosko. **Il fuzzy pensiero**, Baldini e Castoldi, Milano
- W. Pedrycz. **Fuzzy control and Fuzzy systems**. John Wiley, New York
- H .-J. Zimmerman, **Fuzzy Set Theory**, Kluwer, Boston
- D. Dubois, H. Prade, **Fuzzy Sets and Systems**: **Theory and Applications**, Academic Press, New York
- D. Dubois, H. Prade, **Fundamentals of Fuzzy Sets**, Springer, Berlin
- G.J. Klir,  B. Yuan, **Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications**. Prentice Hall, Upper Saddle River

- http://www.abo.fi/~rfuller/fuzs.html
- http://www.cs.cmu.edu/Groups/AI/html/faqs/ai/fuzzy/part1/faq.html
- http://www.cs.nthu.edu.tw/~jang/nfsc.htm